TEMA 2 ESPACIOS VECTORIALES. PROPIEDADES.(2019_20)

2.1 ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN: Sea $O \neq V$ conjunto,

$(K,+,.)$ cuerpo, "$+$" ley de composición interna,

"$.$" ley de composición externa en V con dominio de operadores en K

$(V,+,.K)$ es un **espacio vectorial sobre** K si:

1) $(V,+)$ grupo conmutativo

2) Además : $i)\ \lambda(\bar{u}+\bar{v}) = \lambda\bar{u}+\lambda\bar{v} \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in V,\ \forall \lambda \in K$

$ii)\ (\lambda+\mu)\bar{u} = \lambda\bar{u}+\mu\bar{u} \quad \forall \lambda,\mu \in K, \forall \bar{u} \in V$

$iii)\ (\lambda\mu)\bar{u} = \lambda(\mu\bar{u}) \quad \forall \lambda,\mu \in K, \forall \bar{u} \in V$

$iv)\ 1.\bar{u} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V$

Notación: 1) El cuerpo K : **cuerpo base** ($K = Q, R$ ó C)

2)Elementos de V : **vectores** $\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}},\bar{\mathbf{w}}$...3) Elementos de K :**escalares**.$\lambda,\mu\ldots$

EJEMPLOS: **1**) El **e.v.** de los **vectores libres del espacio**.

2) El **e.v. nulo**. **3**) Todo cuerpo es e.v. sobre si mismo.

4) $(R^n,+,.)$ es e.v. sobre R

2.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN: $(V,+,.K)$ es un espacio vectorial sobre K , $U \subset V$, $U \neq O$

U es un subespacio vectorial de V si

$(U,+,.K)$ es un espacio vectorial sobre K

PROPOSICIÓN: (**caracterización de s.v.**)

Sea $(V,+,.)$ es un espacio vectorial sobre K , $U \subset V$, $U \neq O$

U es un subespacio vectorial de V $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u}+\bar{v} \in U & \forall \bar{u},\bar{v} \in U \\ \lambda\bar{u} \in U & \forall \bar{u} \in U\ ,\ \forall \lambda \in K \end{cases} \Leftrightarrow \lambda\bar{u}+\mu\bar{v} \in U \text{ donde } \bar{u},\bar{v} \in U,\ \lambda,\mu \in K$$

OBSERVACIÓN: U es un **s .v.**de **V** $\Rightarrow$ $\bar{\mathbf{0}} \in U$

EJEMPLO: (Prb 1 Hoja 2_01)

1) Sea $(V,+,.)$ es un espacio vectorial.

$O = \{\bar{0}\}$ es s.v de **V.y V** es s.v de si mismo.

2) **U**= $\{(x,x)/x \in R\}$ es s.v de R^2

3) **U**= $\{(x,0)/x \in R\}$ es s.v de R^2

4) En R^2 , U ={vectores con origen en O y extremo en la recta r}

donde r es una recta que pasa por el origen. U **es un s.v. de** R^2

5) En R^2, A ={vectores con origen O y extremo en la recta r} $\cup$

$\cup$ {vectores en O y extremo en la recta s} donde

r y s son una rectas que pasan por el origen, $r \neq s$. A **no es un s.v. de** R^2

2.3 OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES:

INTERSECCION DE S.V.

DEFINICIÓN: Sea $\mathbf{V}$ e.v.sobre K, y sean $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ s.v de **V**

Se define $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{\bar{u} \in \mathbf{V} / \bar{u} \in \mathbf{U}_1 \text{ y } \bar{u} \in \mathbf{U}_2\}$

PROPOSICIÓN: Sea $\mathbf{V}$ e.v.sobre $\mathbf{K}$, y sean $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ s.v de **V**

Se puede asegurar que su intersección $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ es también un s.v. de **V**

De forma general

DEFINICIÓN Sea $\mathbf{V}$ e.v.sobre K, y sea $\{\mathbf{U}_i \,:\, i \in I\}$ una familia de s.v de **V**

Se define $\bigcap_{i\in I} \mathbf{U}_i = \{\bar{u} \in \mathbf{V} \,/\, \bar{u} \in \mathbf{U}_i\}$

PROPOSICIÓN: Si $\mathbf{V}$ e.v.sobre $\mathbf{K}$, y $\{\mathbf{U}_i \,:\, i \in I\}$ una familia de s.v de **V**.

Entonces la intersección $\bigcap_{i\in I} \mathbf{U}_i$ es también un s.v. de **V.**

EJEMPLO : (Prb 2 Hoja 2_0)

Sea $(\mathrm{R}^{\mathbf{3}},+,.)$ e.v. sobre R .Comprobar que son s.v. de R^3

a) $\mathbf{U}_1 = \{(x_1,x_2,0)/x_1,x_2 \in \mathrm{R}\}$, **b)** $\mathbf{U}_2 = \{(x_1,0,x_3)/x_1,x_3 \in \mathrm{R}\}$ y **c)**$\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$

OBSERVACIÓN: **La unión de s.v. no es en general un s.v.**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{U_1} = \{(x,x)/x \in \mathrm{R}\} \text{ es s.v de } \mathrm{R}^2 \\ \mathbf{U_2} = \{(x,0)/x \in \mathrm{R}\} \text{ es s.v. de } \mathrm{R}^2 \end{array}\right\} \text{Pero } \mathbf{U_1} \cup \mathbf{U_2} \text{ no es s.v.de } \mathrm{R}^2$$

SUMA DE S.V.

DEFINICIÓN : Sea $\mathbf{V}$ e.v.sobre K, y sean $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ s.v de **V**

Se define $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \,:\, \bar{u}_1 \in \mathbf{U}_1 \text{ y } \bar{u}_2 \in \mathbf{U}_2\}$

PROPOSICIÓN: Si $\mathbf{V}$ es e.v.sobre $\mathbf{K}$, y $\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2$ son s.v. de **V** .

Entonces $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ es también un **s.v. de V.**

En general

DEFINICIÓN : Sea $\mathbf{V}$ e.v.sobre $\mathbf{K}$, y sean $\mathbf{U}_1,\ldots,\mathbf{U}_n$ s.v. de **V**

Se define $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}_i = \{\bar{u}_1 + \ldots + \bar{u}_n \,:\, \bar{u}_1 \in \mathbf{U}_1,\ldots,\bar{u}_n \in \mathbf{U}_n\}$

PROPOSICIÓN: Sea $\mathbf{V}$ e.v.sobre $\mathbf{K}$, y sean $\mathbf{U}_1,\ldots,\mathbf{U}_n$ s.v. de **V**

Entonces su suma $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}_i$ es s.v.de**V** es también un **s.v. de V.**

EJEMPLO: (Prb 3 Hoja 2_0) Sea $(\mathrm{R}^{\mathbf{3}},+,.)$ e.v. sobre R .

Comprobar que $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ son s. v. de R^3 y determinar $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$

1) $\mathbf{U}_1 = \{(x,0,0)/x \in \mathrm{R}\}$ y $\mathbf{U}_2 = \{(0,y,0)/y \in \mathrm{R}\}$

2) $\mathbf{U}_1 = \{(\alpha,2\alpha,0)/\alpha \in \mathrm{R}\}$ y $\mathbf{U}_2 = \{(\beta,0,-\beta)/\beta \in \mathrm{R}\}$

OBSERVACIÓN: Sea V e.v.sobre K ;$\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2$ s.v. de V .

$\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ es el **mayor s.v. contenido** en $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$

$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ es el **menor s.v. que contiene** a $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$

$\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2$ **no es en general un s.v.** 2

2.4 SUMA DIRECTA. ESPACIOS SUPLEMENTARIOS

DEFINICIÓN:Sea V e.v. sobre K y sean $\mathbf{U}_1,...,\mathbf{U}_n$ s.v. de V .
Se dice que $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}_i$ es **suma directa** y se nota $\mathbf{U}_1 \oplus ... \oplus \mathbf{U}_n$
si cualquier vector del e.v.suma **puede expresarse de forma única** como suma de los e.v. sumandos.

PROPOSICIÓN:Sea V e.v. sobre K y sean $\mathbf{U}_1,...,\mathbf{U}_n$ s.v. de V .
1) **Si** $\mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{U}_n$ es **suma directa** entonces $\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j = \{\overline{0}\}$ si $i \neq j$
2) El recíproco no es cierto en general.

Sin embargo en el **caso particular** de **dos s.v**

PROPOSICIÓN:Si V e.v. sobre K y son $\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2$ s.v. de V .
$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$ suma directa $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{\overline{0}\}$
Se expresa $\mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$

ESPACIOS SUPLEMENTARIOS

DEFINICIÓN:Sea V e.v. sobre K ; $\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2$s.v. de V
Si $\mathrm{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$ se dice que $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ son **s.v. suplementarios de** V

Y evidentemente: $\mathrm{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{V} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 = \{\overline{0}\} \end{cases}$

EJEMPLOS: (Prb 4 Hoja 2_0)
Obtener $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ y razonar si son o no s.v. suplementarios.
1)$\mathbf{U}_1 = \{(x,x)/x \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^2, $\mathbf{U}_2 = \{(x,0)/x \in \mathrm{R}\}$ s.v. de R^2
2)$\mathbf{U}_1 = \{(x,y,0)/x,y \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3, $\mathbf{U}_2 = \{(0,0,z)/z \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3
3)$\mathbf{U}_1 = \{(x,y,0)/x,y \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3, $\mathbf{U}_2 = \{(x,0,z)/x,z \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3

2.5 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN: Sea V un e.v. sobre K,
y consideremos el conjunto de vectores $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\} \subset \mathrm{V}$.
Se define **combinación lineal** (**C.L**) de $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ a toda expresión de la forma :

$\lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{u}_n$ donde $\lambda_i \in \mathrm{K},\ i = 1,\ldots n$

DEFINICIÓN:Sea V e.v. sobre K y consideremos el conjunto $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\} \subset \mathrm{V}$.
Se dice que $\bar{\mathbf{v}}$ es **combinación lineal** ó **depende linealmente** de $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ si

$\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathrm{K}$ tal que. $\bar{\mathbf{v}} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{u}_n$

OBSERVACIONES:

$\boxed{1}$ Cualquier vector de $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ depende linealmente de ellos mismos.

$\bar{u}_i = 0.\bar{u}_1 + \ldots + 0.\bar{u}_{i-1} + 1.\bar{u}_i + 0.\bar{u}_{i+1} + \ldots + 0.\bar{u}_n\ ,\ i = 1,2,\ldots,n$

$\boxed{2}$ $\bar{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$.

$\bar{0} = 0.\bar{u}_1 + .. + 0.\bar{u}_i + \ldots + 0.\bar{u}_n,\ i = 1,2,\ldots,n$

$\boxed{3}$ $(\mathrm{R}^4,+,.)$ e.v.sobre R, $\underbrace{(0,-2,-1,0)}_{\bar{v}} = \underbrace{(3,-1,0,1)}_{\bar{u}_1} - 2\underbrace{(1,0,1,0)}_{\bar{u}_2} - \underbrace{(1,1,-1,1)}_{\bar{u}_3}$

$\bar{v}$ es combinación lineal de $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$

DEFINICIÓN:Sean V e.v. sobre K y el conjunto finito de vectores A
$A = \{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\} \subset \mathrm{V}$. Se define **s.v engendrado** o **generado** por A a
$\mathrm{L}(A) = L(\{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\}) = \{\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n \,/\, \lambda_i \in \mathrm{K}\ ,\ i = 1,\ldots n\}$
Se dice en ese caso que A es **sistema generador** (**S.G**.)

PROPOSICIÓN: Sean V e.v. sobre K, y $A = \{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\} \subset \mathrm{V}$. Se prueba que
$\mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(\{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n\}) = \{\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n \,/\, \lambda_i \in \mathrm{K}\ ,\ i = 1,\ldots n\}$
es un **subespacio vectorial** (**s.v**.)

EJEMPLOS: (Prb 5 Hoja 2_0)
Obtener $\mathrm{L}(A_i)$ $i = 1,2,3,4,5$
Determinar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implicitas en cada caso.

$\boxed{1}$ $(\mathrm{R}^2,+,.)$ e.v. sobre R, $A_1 = \{(-1,2)\},\ A_2 = \{(1,0),(0,1)\}$

$\boxed{2}$ $(\mathrm{R}^3,+,.)$ e.v. sobre R, $A_3 = \{\bar{u}_1 = (1,0,0),\bar{u}_2 = (0,1,0),\bar{u}_3 = (0,0,1)\}$

$A_4 = \{\bar{u}_1 = (1,0,0),\bar{u}_2 = (0,1,0),\}$, $A_5 = \{\bar{u}_1 = (1,0,0)\}$,

$\boxed{3}$ $(\mathrm{R}^3,+,.)$ e.v. sobre R, $A_6 = \{\bar{u}_1 = (1,1,1),\bar{u}_2 = (-1,2,3),\bar{u}_3 = (1,4,5)\}$ 4

2.6 INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

OBSERVACIONES:

1) Observemos para cualquier conjunto de vectores de $(\mathrm{V},+,.\mathrm{K})$,
$S=\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$, el vector nulo $\bar{0}$ es siempre C.L.de los vectores de S.
En efecto $\bar{0}=0\bar{u}_1+0\bar{u}_2+\ldots+0\bar{u}_n$

2) Consideros ahora los vectores de $\mathrm{R}^3, S=\{(3,2,4),(1,0,2),(1,2,0)\}$
como en 1) se obtiene la c.l. $(0,0,0)=0(3,2,4)-0(1,0,2)-0(1,2,0)$
pero también $(0,0,0)=(3,2,4)-2(1,0,2)-(1,2,0)$
y tambien $(0,0,0)=\frac{1}{2}(3,2,4)-(1,0,2)-\frac{1}{2}(1,2,0)$
Observemos por tanto que para este conjunto de vectores S,
existen **distintas C.L**. que obtienen el vector $\bar{0}$. Se dice en este caso que los vectores $S=\{(3,2,4),(1,0,2),(1,2,0)\}$ forman un sistema **linealmente dependiente**.

DEFINICIÓN:

Los vectores $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n\}$ son **linealmente independientes** (**L.I.**.)
si y solo si (por definición)

$$\bar{0}=\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\ldots+\lambda_n\bar{u}_n \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$$

Si los vectores $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n\}$ **no son** L.I.
se dice que son **linealmente dependedientes** (L.D.)

DEFINICIÓN:

Los vectores $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n\}$ son **linealmente dependientes** (L.D.)
si y solo si (por definición)
Existen $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ **no todos nulos** tales que $\bar{0}=\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\ldots+\lambda_n\bar{u}_n$

EJEMPLO

En R^2 los vectores $\{(1,2),(0,1)\}$ son l.i. y $\{(1,2),(0,1),(1,1)\}$ son l.d.

PROPOSICIÓN: **Propiedades de la dependencia lineal**

Sea V un e.v. sobre K..Se verifican las siguientes propiedades
1) $\bar{0}$ es C.L. de cualquier sistema de vectores.
2) Si $\bar{u}\neq\bar{0}$ entonces $\{\bar{u}\}$ es L.I.
3) Cualquier sistema de vectores que contenga el vector $\bar{0}$ es L.D.
4) Un conjunto con dos vectores iguales forma un sistema L.D.
5) Añadiendo vectores a un conjunto L.D. se obtiene un conjunto L.D.
6) Cualquier subconjunto de un conjunto L.I. es un conjunto LI.

EJEMPLOS: Recordar Prb 5 Hoja 2_0)

TEOREMA de la dependencia lineal:

Un conjunto de vectores $\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n\}$ es L.D. si al menos
uno de ellos es combinación C. L. de los demás

EJ: (Prb 6 Hoja 2_0)Probar si los siguientes sistemas de vectores son ono L.D.
1) En $\mathrm{R}^3, \{(1,0,1),(1,-1,1),(2,1,2)\},\{(1,1,1),(1,3,2),(2,1,2)\},\{(0,0,0),(1,2,3)\}$
$\{(1,2,3),(1,1,1),(-3,2,1)\},\{(1,2,3),(1,1,1),(3,4,5)\},\{(1,-1,0)(1,2,7),(1,2,1),(1,0,1)\}$,
4) En R^4 $\{(1,2,1,1),(1,0,1,0)\},\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$,
$\{(0,0,0,0)(3,1,2,7),(1,2,1,1)\},\{(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,1,0,0),(2,3,1,2)\}$ 5

2.7 BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

DEFINICIÓN El conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ forman una **base** del espacio vectorial $(\mathrm{V}, +, .\mathrm{K})$ si es un **sistema generador** (**S.G**.) que es **L.I.**, es decir,

$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ es **base** de $\mathrm{V} \Leftrightarrow B$ es **S.G**. y B es **L.I.**

Se puede afirmar por tanto,

para que B sea **una base** de V debe verificarse

I) $\forall \bar{u} \in V,\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$ con $\bar{u} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{u}_n$

II) $\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{u}_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

EJEMPLO: (Prb 7 Hoja 2_0) En R^3

1) $B = \{(1,0,1), (1,-1,1), (2,1,2)\}$ **no forman una base** son L.D.

2) $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ **es una base** L.I. que es S.G.

3) En R^3 $B_1 = \{(1,2,3), (1,1,1), (-3,2,1)\}, B_2 = \{(1,2,3), (1,1,1), (3,4,5)\}$,
$B_3 = \{(1,-1,0)(1,2,7), (1,2,1), (1,0,1)\}$, $B_4 = \{(0,0,0), (1,2,3)\}$

DEFINICIÓN: Se dice que un e.v. es de **dimensión finita** si y solo si tiene un **sistema generador finito**

TEOREMA :
Todo e.v de dimensión finita distinto de $\{\bar{0}\}$, tiene al menos una base

TEOREMA :Todas las bases de un e.v. de dimensión finita tienen el mismo numero de vectores.

DEFINICIÓN: La **dimensión de un e.v** de dimensión finita es el número de vectores de cualquiera de sus bases

Si la dimensión del e.v. V es n se designará por V_n

EJEMPLO: Bases canónicas

a)$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ **es una base** de R^3 .

b)$B = \{(1,0,0,0), (0,0,1.0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ **es una base** de R^4 .

Luego $\dim \mathrm{R}^3 = 3$ y $\dim \mathrm{R}^4 = 4$

EJEMPLO: (Prb 8 Hoja 2_0) Comprobar que B es una base del e.v. dado

a)$B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ **es una base** de R^3 .

b)$B = \{(1,0,1,0), (0,1,1.0), (1,0,0,1), (0,0,0,1)\}$ **es una base** de R^4 .

Luego $\dim \mathrm{R}^3 = 3$ y $\dim \mathrm{R}^4 = 4$

TEOREMA : **extensión a una base**

Sea el conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k\}$ L.I. del espacio vectorial $(\mathbf{V}_n, +, .\mathrm{K})$. Siempre es posible extender este conjunto con vectores de $\mathbf{V}_n$ hasta obtener una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_n\}$

TEOREMA: (**unicidad**)

Todo vector del e.v. $(\mathbf{V}_n, +, .\mathrm{K})$ puede **expresarse de forma única** como C.L. de los vectores de una base. **6**

DEFINICIÓN: **coordenadas de un vector**

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$ de la C.L. del vector $\bar{u}$, **únicos** respecto de la base B, se denominan **coordenadas del vector** $\bar{u}$ en esa base.

EJEMPLO :(Prb9 Hj 2_0)

Consideremos las bases B de R^3 y R^4 del Prb8 anterior

a)$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ **es una base** de R^3 .

b)$B = \{(1,0,1,0),(0,1,1.0),(1,0,0,1),(0,0,0,1)\}$ **es una base** de R^4 .

Obtener las coordenadas de los vectores $\bar{\mathbf{v}}$ en la base B conociendo sus coordenadas en la base canónica

a)$\bar{\mathbf{v}} = (2,-2,0)$ **b**)$\bar{\mathbf{v}} = (1,-2,0,1)$

TEOREMA : **dimensión y suma de subespacios**

Si U_1 y U_2 son subespacios de $(\mathbf{V}_n,+,.\mathrm{K})$, se verifica que

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

TEOREMA : **dimensión y suma de subespacios**

Si U_1 y U_2 son subespacios de $(\mathbf{V}_n,+,.\mathrm{K})$ tales que $U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\}$ se verifica $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

EJEMPLO :(Prb10 Hoja 2_0)

Consideremos los s.v. de R^4

$U = L(\{(1,-1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,1,0)\})$

$$V : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Obtener unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implicitas y una base de U y V.

b) Determinar $U + V$ y $U \cap V$ y obtener unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implicitas y una base de U y V.

7

2.8 CAMBIO DE BASE

Sean dos bases de V_n , $B = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n\}$ y $B' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n\}$
del e.v. $(\mathbf{V}_n, +, .\mathrm{K})$
Supongamos que la relación entre las coordenadas de los vectores de
B y los de **B**' es

$$\begin{cases} \overline{v}_1 = c_{11}\overline{u}_1 + c_{21}\overline{u}_2 + \dots + c_{n1}\overline{u}_n \\ \overline{v}_2 = c_{12}\overline{u}_1 + c_{22}\overline{u}_2 + \dots + c_{n2}\overline{u}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{v}_n = c_{1n}\overline{u}_1 + c_{2n}\overline{u}_2 + \dots + c_{nn}\overline{u}_n \end{cases}$$

Sea el vector $\overline{\mathbf{w}}$ que respecto de la base **B**, se expresa de forma única como

$$\overline{\mathbf{w}} = x_1\overline{u}_1 + x_2\overline{u}_2 + \dots + x_n\overline{u}_n = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)_B$$

y como **B**' también es base se tiene

$$\overline{\mathbf{w}} = x_1'\overline{v}_1 + x_2'\overline{v}_2 + \dots + x_n'\overline{v}_n = (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \dots, \mathbf{x}_n')_{B'}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{w}} &= x_1'\overline{v}_1 + x_2'\overline{v}_2 + \dots + x_n'\overline{v}_n = \\ &= x_1'(c_{11}\overline{u}_1 + c_{21}\overline{u}_2 + \dots + c_{n1}\overline{u}_n) + x_2'(c_{12}\overline{u}_1 + c_{22}\overline{u}_2 + \dots + c_{n2}\overline{u}_n) + \dots \\ &\qquad \dots + x_n'(c_{1n}\overline{u}_1 + c_{2n}\overline{u}_2 + \dots + c_{nn}\overline{u}_n) = \\ &= (c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \dots + c_{1n}x_n')\overline{u}_1 + (c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \dots + c_{2n}x_n')\overline{u}_2 + \dots \\ &\qquad \dots + (c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \dots + c_{nn}x_n')\overline{u}_n \end{aligned}$$

de aqui se tiene
$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \dots + c_{1n}x_n' \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \dots + c_{2n}x_n' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \dots + c_{nn}x_n' \end{cases}$$

que son las **ecuaciones del cambio de base de B' a B**.
Matricialmente:

$$X = PX', \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}_{B'}$$

P es la matriz del cambio de base de **B' a B** $(X_B = PX'_{B'})$
P^{-1} es la matriz del cambio de base de **B a B**' $(X'_{B'} = P^{-1}X_B)$

Nota: En ocasiones utilizaremos la notación
M(**B**',**B**)=**P**, **M**(**B**,**B**')=**P**$^{-1}$

Observemos que en las columnas de matriz P

$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{n1} \end{pmatrix}_B$ son las coordenadas de $\bar{v}_1$ en B.

$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{n2} \end{pmatrix}_B$ son las coordenadas de $\bar{v}_2$ en B

....

$\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \dots \\ c_{nn} \end{pmatrix}_B$ son las coordenadas de $\bar{v}_n$ en B

EJEMPLO :(Prb11 Hoja 2_0 y Prb14 Hoja 2_2)

A) Consideramos el e.v.$\mathbb{R}^2$, las bases $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ y $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

siendo $\begin{cases} \bar{v}_1 = c_{11}\bar{u}_1 + c_{21}\bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 = c_{12}\bar{u}_1 + c_{22}\bar{u}_2 \end{cases}$

Obtener las ecuaciones del cambio de base B' a B.

B)En.$\mathbb{R}^2$, $B = C_{\mathbb{R}^2}, B' = \{\bar{u}_1 = (1,1)_{C_{\mathbb{R}^2}}, \bar{u}_2 = (1,0)_{C_{\mathbb{R}^2}}\}$ y

$B'' = \{\bar{v}_1 = (1,2)_{C_{\mathbb{R}^2}}, \bar{v}_2 = (-1,1)_{C_{\mathbb{R}^2}}\}$

b_1_Obtener las ecuaciones del cambio de base B' a $C_{\mathbb{R}^2}$ y de $C_{\mathbb{R}^2}$ a B'

b_2_Obtener las ecuaciones del cambio de base B" a $C_{\mathbb{R}^2}$y de $C_{\mathbb{R}^2}$ a B"

b_3_Obtener las ecuaciones del cambio de base B" a B' y de B' a B"

EJEMPLO :(Prb12 Hoja 2_0 y Prb15 Hoja 2_2)

Consideremosen $\mathbb{R}^3$ la base canónica $C_{\mathbb{R}^3}$ y las bases

$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}, B' = \{(1,3,2),(0,1,-1),(1,0,0)\}$.

i) Ecuaciones del cambio de base de la base B y B' a la base $C_{\mathbb{R}^3}$.

ii) Matriz del cambio de coordenadas de $C_{\mathbb{R}^3}$ a B y de $C_{\mathbb{R}^3}$ a B'

ii) Coord del vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ en B si $(1,0,3)_{C_{\mathbb{R}^3}}$ son sus coord un la base $C_{\mathbb{R}^3}$.

iii) Coord del vector $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ en $C_{\mathbb{R}^3}$.si $(-1,1,2)_B$ son sus coordenadas en B .

iv) Matriz del cambio de base de B a B' y la matriz del cambio B' a B .

v) Coord del vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ en B' si $(0,-1,2)_B$ son sus coord un la base B

v) Coord del vector $\bar{q} \in \mathbb{R}^3$ en B si $(1,0,-1)_{B'}$ son sus coord un la base B'